



Research in the General of the Special Type System in Three-Dimensional Space

Khusanov B

Candidate of Physical and Mathematical, Samarkand State Institute of Architecture and Civil Engineering Uzbekistan

Turaev M

Deputy Director for Science and Innovation, Candidate of Physical and Mathematical Sciences at Kattakurgan branch of Samarkand State University

Abstract: In the work was studied a qualitative picture of the trajectories of a three-dimensional system of a special type and obtained that if the algebraic equation has not real solutions, then for $e(ad-bc) \neq 0$ this system can have five, three or one exceptional direction adjacent to the origin.

Keywords: Isolated, at infinity, singular point, degenerate knot, open saddle knot, limit cycle, boundary loop (period) coexistence.

Date of Submission: 28-4-2022

Date of Acceptance: 27-5-2022

Вывод. Рассмотрим в трёх мерном пространстве исследование в целом системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (ax + by)z^{n-1} \\ \frac{dy}{dt} &= (cx + dy)z^{n-1} \\ \frac{dz}{dt} &= \sum_{i+j=n} c_{ij}x^i y^j + ez^n \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

где $n > 1, a, b, \dots$ постоянные коэффициенты в окрестности изолированной особой точки O при условии $e(ad - bc) \neq 0$. Исследование проведем методом, изложенным в работе [1].

Введем подстановку $x = uz, y = vz$ и новое время t_1 , полагая: $z^{n-1}dt = dt_1$. Сохраняя прежние обозначения для времени, получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= (a-e)u + bv - uR_n(u, v) \\ \frac{dv}{dt} &= cu + (d-e)v - vR_n(u, v) \\ \frac{dz}{dt} &= z(e + R_n(u, v)) \end{aligned} \right\}, \quad (2)$$

$$\text{где } R_n(u, v) = \sum_{i+j=n} c_{ij} u^i v^j.$$

Л е м м а 1. Бесконечно удаленным особым точкам дифференциального уравнения

$$\frac{dv}{du} = \frac{cu + (d-e)v - vR_n(u, v)}{(a-e)u + bv - uR_n(u, v)} \quad (3)$$

Соответствуют особые линии системы (1.7.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о . Следует из подстановок

$$u = \frac{1}{w}, \quad v = \frac{\tau}{w} \quad (4)$$

$$\text{и } y = ux, \quad z = vx \quad (5)$$

соответственно для уравнения (3) и система (1). После преобразования (4) уравнение (3) примет вид

$$\frac{d\tau}{dw} = \frac{[c + (d-a)\tau - b\tau^2]w^{n-1}}{(a-e+b\tau)w^n - R_n(1, \tau)}. \quad (6)$$

Отсюда видим, что изолированные особые точки экватора определяются из уравнения

$$w = 0, \quad R_n(1, \tau) = 0. \quad (7)$$

Если введем преобразование (4) в систему (3), получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt_1} &= xv^{n-1}(a + bu) \\ \frac{du}{dt_1} &= v^{n-1}[c + du - u(a + bu)] \\ \frac{dv}{dt_1} &= R_n(u, v) + ev^n - v^n(a + bu) \end{aligned} \right\}, \quad (8)$$

$$\text{где } x^{n-1}dt = dt_1.$$

Отсюда видим, что изолированным особым точкам этой системы, определяем из системы

$$v = 0, \quad R_n(1, u) = 0, \quad (9)$$

соответствуют особые линии системы (1) (см. [2]). Следовательно, если уравнение (6) имеет изолированные особые точки в бесконечности, то система (3) будет иметь особые линии, и начало координат для этой системы не будет изолированной особой точкой.

Лемма 2. Если нечетное $n > 1$, то O для системы (1) не может быть изолированной особой точкой.

Доказательство. Можно заметить, что если n нечетное, то уравнение (6) в бесконечности будет иметь изолированные особые точки (по крайней мере одну), причем они будут высшего порядка, а при $n = 1$ уравнение (6) может не иметь изолированных особых точек в бесконечности.

В силу лемм 1, 2 O будет изолированной особой точкой для системы (3). Если уравнение (6) не имеет особых точек в бесконечности, то O может быть изолированной особой точкой, что возможно только если n - четное число.

Сначала исследуем уравнение (6) в целом, когда оно не имеет изолированных особых точек в бесконечности (разумеется, при четном n).

Пусть λ_1, λ_2 - корни характеристического уравнения для изолированной особой точки $O(0,0)$, тогда логически могут представиться следующие случаи:

1⁰. Корни λ_1, λ_2 действительные и различные. Тогда уравнение (6) приводится к виду

$$\frac{dv}{du} = \frac{\lambda_1 v - v R_n(u, v)}{\lambda_2 u - u R_n(u, v)}, \quad (10)$$

где u, v - новые переменные, а постоянные коэффициенты обозначены через старые. Пусть $\lambda_1 c_{0n} > 0, \lambda_2 c_{n0} > 0$, тогда уравнение (10) имеет следующие (кроме $O(0,0)$) изолированные особые точки:

$$M_{2,3} \left(\pm \sqrt[n]{\frac{\lambda_2}{c_{n0}}}, 0 \right), M_{4,5} \left(0, \pm \sqrt[n]{\frac{\lambda_1}{c_{0n}}} \right).$$

Если $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, то из четырех особых точек $M_{2,3}$ и $M_{4,5}$ две будут узлами, две другие – седлами, а в бесконечности уравнение (10) может не иметь особых точек.

Если $\lambda_1 c_{0n} > 0, \lambda_2 c_{n0} < 0$ или $\lambda_1 c_{0n} < 0, \lambda_2 c_{n0} > 0$,

то при $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ уравнение (10) может иметь два узла и седло. Если же $\lambda_1 c_{0n} < 0, \lambda_2 c_{n0} < 0$, то при $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ уравнение (10) может иметь только одну особую точку $O(0,0)$ - узел. Предельных циклов нет.

2⁰. Когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$, то уравнение (2) приводится к виду

$$\frac{dv}{du} = \frac{\lambda v + \omega u + v R_n(u, v)}{\lambda u + u R_n(u, v)}, \quad (11)$$

где ω - произвольная постоянная.

Если $\lambda_1 c_{0n} > 0$, то уравнение (11) имеет три изолированные особые точки: O - выраженный узел, а $\left(0, \pm \sqrt[n]{\frac{\lambda}{c_{0n}}}\right)$ - открытые седло узлы. Предельных циклов нет.

3⁰. Пусть корни λ_1, λ_2 комплексные, то есть $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ тогда уравнению (2) можно придать вид

$$\frac{dv}{du} = \frac{\alpha v + \beta u + v R_n(u, v)}{\alpha u - \beta v - v R_n(u, v)}, \quad (12)$$

где $\beta \neq 0$, $R_n(u, v) = \sum_{i+j=n} c_{ij} u^i v^j$

c_{ij} - вещественный коэффициент.

Уравнение (12) имеет единственную особую точку O - фокус или центр. Вокруг грубого фокуса может существовать единственный алгебраический предельный цикл.

З а м е ч а н и е 1. Дифференциальное уравнение (2) всегда сводится к квадратурам. В самом

дело, после подстановки $w = \frac{v}{u}$ оно сводится к виду

$$\frac{dw}{dw} = \frac{(a-e) + bw}{c + (d-a)w - bw} w = -R_n(1, w) u^{n-1}. \quad (13)$$

Далее переходим к исследованию системы (1).

4⁰. Если характеристическое уравнение, составленное для начала координат системы (3).

$$\begin{vmatrix} a-e-\lambda & b & 0 \\ c & d-e\lambda & 0 \\ 0 & 0 & e-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (14)$$

имеет три действительных корня $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, то система (1) может иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (\lambda_1 + \lambda_3) x z^{n-1} \\ \frac{dy}{dt} &= (\lambda_2 + \lambda_3) y z^{n-1} \\ \frac{dz}{dt} &= R_n(x, y) + \lambda_3 z^n \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Начало координат для этой системы будет изолированной особой точкой, если уравнение $R_n(1, \tau) = 0$ не имеет действительных решений, а через O при $\lambda_1 c_{0n} > 0$, $\lambda_2 c_{n0} > 0$, проходят пять исключительных направлений, причем при $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ возможны следующие три случая для их совместного существования если обозначим через $N(y), N(c_1), N(cy)$,

$N(\phi), N(c\phi)$, - количество исключительных направлений, примыкающих к изолированной особой точки O соответственной типа узел, седло, седло-узел, фокус и седло фокус $\{3\}$ тогда имеем:

- 1) $N(c_1)=3, N(c_2)=2$;
- 2) $N(y)=1, N(c_1)=2; N(c_2)=2$;
- 3) $N(c_1)=3, N(c_1)=2$;

Пусть $\lambda_1 c_{0n} > 0, \lambda_2 c_{n0} < 0$ или $\lambda_1 c_{0n} < 0, \lambda_2 c_{n0} < 0$ и $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, система будет иметь только три исключительных направления и возможны случаи:

- 1) $N(y)=2, N(c_2)=1$;
- 2) $N(c_1)=2, N(c_2)=1$.

Пусть $\lambda_1 c_{0n} > 0, \lambda_2 c_{n0} < 0$, и $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ через начало происходит только одно исключительное направление типа $N(y)$ или $N(c_1)$. Предельных конусов нет.

5°. Если уравнение (13) имеет одно двукратное решение $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то система (1) можно придать вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= [(\lambda + \lambda_3)x]z^{n-1} \\ \frac{dy}{dt} &= [(\lambda + \lambda_3)y + \omega x]z^{n-1} \\ \frac{dz}{dt} &= R_n(x, y) + \lambda_3 z^n \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Пусть $\lambda_1 c_{0n} > 0$, то эта система имеет три исключительных направления (конечно, при изолированности O) возможны случаи:

- 1) $N(y)=1, N(cy)=2$;
- 2) $N(c_1)=1, N(cy)=2$.

6°. Пусть уравнение (7) имеет одно действительное и два комплексные решения, то система (1) можно придать вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= [(\alpha + \lambda_3)x - \beta y]z^{n-1} \\ \frac{dy}{dt} &= [(\lambda + \lambda_3)y + \beta y]z^{n-1} \\ \frac{dz}{dt} &= R_n(x, y) + \lambda_3 z^n \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Система (17) имеет единственное исключительное направление типа $N(\phi)$ и $N(c\phi)$, вокруг которого может существовать один предельный конус.

Итак, доказана

Т е о р е м а. Если алгебраическое уравнение $R_n(1, \tau) = 0$ не имеет действительных решений (что возможно только при четном n), то при $e(ad - bc) \neq 0$ система (1) может иметь пять, три или одно исключительное направление, примыкающее к O , и возможны случаи их совместного существования

I. $N(y) = 3$, $N(c) = 2$; 2) $N(y) = 1$, $N(c) = 4$; 3) $N(c) = 5$;

II. $N(y) = 2$, $N(c) = 1$; 2) $N(c) = 3$; 3) $N(c) = 1$, $N(cy) = 2$;

III. $N(y) = 1$. 2) $N(c\phi) = 1$; 3) $N(\phi) = 1$;

З а м е ч а н и е 2. Вдоль исключительного направления типа $N(y)$ все траектории, попавшие в достаточно малую окрестность этого направления, входит в особую точку [2].

З а м е ч а н и е 3. Вдоль исключительного направления типа $N(c_1)$ в особую точку не входит ни одна траектория.

З а м е ч а н и е 4. Вдоль исключительного направления типа $N(c_2)$ траектории одной сепаративной поверхности входят в особую точку, а остальные – нет.

З а м е ч а н и е 5. Вдоль исключительного направления типа $N(\phi)$ интегральные кривые, накручиваясь на исключительное направление, приближается к особой точке [2].

З а м е ч а н и е 6. Вдоль исключительного направления типа $N(c\phi)$ интегральные кривые, накручиваясь на него, удаляются от особой точки [2].

И так, нами рассмотрены все вопросы, касающиеся исследования глобальной картины траекторий трехмерной однородной системы с однофазными непрерывными функциями в правых частях, в случае, если все характеристические числа особых точек и периодических траекторий отличны от нуля.

В заключение отметим, что примененный метод к исследованию качественных вопросов трехмерной однородной системы дифференциальных уравнений легко распространим для однородной системы дифференциальных уравнений произвольной размерности, т.е. для случая $n > 3$

Литература

1. Б.Хусанов, Ш.Р.Шарипов - «О некоторых вопросах траектории - мерный обобщенно-однородной дифференциальной системы» - Изв. АН КазССР серия физ-мат. наук, 1981, №3, с 38-43.
2. Ш.Р.Шарипов, Д.Кулматов - «О совместном существовании особых точек одной дифференциальной системы специального вида» - Изв. АН УзССР серия физ-мат. наук, 1976, №6, с 34-40.
3. Khusanov B. «Application of Index Theory in the Study of Special Points of Differential Equation» European journal of life safety and stability (EjLSS) iSSN 2660-9630. 199-203.